Cálculo da Incerteza da medição guia prático

A Medição

A palavra medição tem múltiplos significados:

– pode ser o processo de quantificação

– pode ser o número resultante

Resultado de uma medição

- Para um leigo:

Resultado da medição = um número e uma unidade

- Para um metrologista

Resultado da medição = (resultado base ± indicador da indeterminação) e uma unidade

O processo de medição

São necessários:

– fundamentação conceitual sobre o fenômeno

– infra-estrutura técnica básica

– capacidade de medição comprovada

– rede de rastreabilidade metrológica

– conhecimento dos fins a que se destinam as informações

Propriedades do processo de medição

- medições repetidas não concordarão entre sí
- médias de medições repetidas não concordarão entre sí
- medições efetuadas em épocas diferentes , lugares diferentes e por operadores , equiapmentos e métodos diferentes não concordarão entre sí

Erros nas medições

- O erro da medição é a diferença algébrica entre o valor indicado ou nominal e o valor verdadeiro convencional ou atual

Erro = Resultado da medição - Valor verdadeiro

Correção do erro da medição

- O erro é utilizado para corrigir a leitura

$$C = -E$$

onde :

C: correção

-E: Erro com sinal trocado

- O valor atual fica sendo:

Valor atual = Valor nominal + correção

Classificação dos erros

- Erros Grosseiros
- Erros sistemáticos
  - Erros instrumentais
    - ineficácia do instrumento
    - maltrato ou sobrecarga do instrumento
  - Erros ambientais
    - Condições ambientais diversas
  - Erros de observação
    - Erros do operador
- Erros aleatórios

Fontes dos erros

- Erros dos instrumentos de medição
  - não linearidade, instabilidade, ruído próprio, etc.
- Erros dos operadores
- Erros materiais
  - materiais sujeitos a desgaste ou envelhecimento
- Erros de procedimento
- Erros do laboratório
  - condições ambientais, vibrações, temperatura, etc.

Algarismos significativos

" A resposta não pode ser conhecida com maior exatidão do que a menor exatidão entre os fatores"

Exemplo: Qual a potência sobre um resistor por onde circulam 1,1 ampéres e estão aplicados 1,1 volts?

$$P = V \times I$$ (lei de ohm)

$$P = 1{,}2 \text{ Watts}$$

(e não 1,21 watts como calculado!)

Probabilidade

$$p\ (A) = n\ (A)\ /N$$

onde

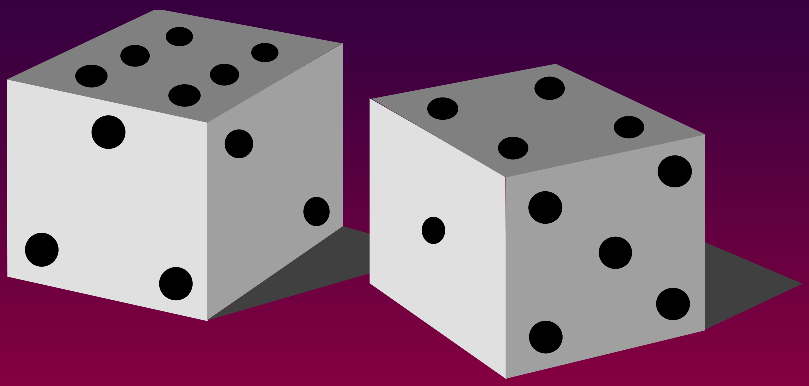
P : probabilidade de um evento ocorrer

A : resultado particular

N : possibilidades iguais de resultados

Probabilidade (cont.)

Qual a probabilidade de atirarmos dois dados e obter o número 9 ?



Numero total de combinações: 36

Numero de combinações que resultam em 9 : 4 (3-6, 4-5, 5-4, 6-3) logo

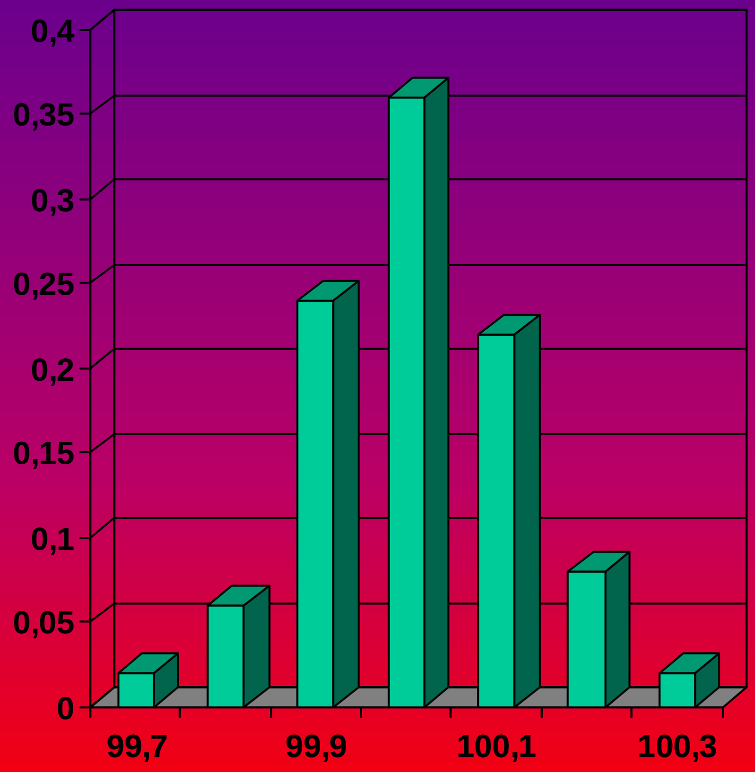
n=4 , N=36

p= 1 em 9 ou 11,1%

Probabilidade (cont.)

Um termômetro com resolução de 0,1 % é utilizado para medir uma temperatura constante de 100ºC.

A quantidade de vezes que, por erros de medição, o valor encontrado afastar-se de 100ºC será tanto menor quanto mais afastado deste valor for o resultado.



Probabilidade (cont.)

Valor da leitura (ºC)	**Número de leituras**	**Ocorrência relativa**
99,7	1	0,02
99,8	3	0,06
99,9	12	0,24
100,0	18	0,36
100,1	11	0,22
100,2	4	0,08
100,3	1	0,02
Total	50	1,00

Medida do valor central

Média do valor central :

(x são valores encontrados, n é o n.º de leituras)

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=l}^{n} x_i$$

Medida do valor central (cont.)

Devemos interpretar a equação anterior da seguinte forma:

- somamos os resultados de leituras sucessivas,
- dividimos pelo número de leituras

O resultado é a média aritmética, e representa o valor central ou típico. Esta média representa o valor mais provável da variável medida.

Medida do valor central (cont.)

<u>**Mas cuidado!**</u>

A média só pode ser calculada sobre valores lineares! Não se deve calcular a média de valores em dB, por exemplo! Neste caso teremos que converter o valor para tensão ou potência primeiro, para depois calcular a média!

Média envolvendo dB’s

Se você duvida, façamos um teste. Qual a média entre os seguintes valores:

0 dBm (1mW)

+10 dBm (10 mW)

+20 dBm (100 mW)

$$1+1=3$$

Média envolvendo dB's

Maneira errada de fazer:

Média (somando os valores em dBm):

$$Vm = \frac{(0\,dBm + 10\,dBm + 20\,dBm)}{3}$$

Vm=10 dBm (ou 10 mW)

Média envolvendo dB’s

Forma correta de fazer - primeiro converta os valores para mW!

$$Vm = \frac{(1mW + 10mW + 100mW)}{3}$$

Vm= 37 mW (ou +16 dBm!)

Medida da dispersão para o valor central

Amplitude da dispersão:

É a diferença entre o maior valor ($x_{máx}$) encontrado e o menor valor (x_{min}) .

$$A = x_{max} - x_{min}$$

Medida da dispersão para o valor central (cont.)

Variância: é a média dos quadrados das diferenças dos valores lidos em relação à sua média (valor central).

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

Medida da dispersão para o valor central (cont.)

A equação anterior se aplica quando o número de amostras é infinito!

Medida da dispersão para o valor central (cont.)

Correlação entre numero infinito de amostras e numero limitado (prática)

	Universo / população	Amostra finita
Média	μ	x
Desvio Padrão	σ	s
Variâncias	σ^2	s^2

Medida da dispersão para o valor central (cont.)

Com um número finito de amostras (prática), e pequena distância entre os valores devemos aplicar:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

Medida da dispersão para o valor central (cont.)

Como calcular:

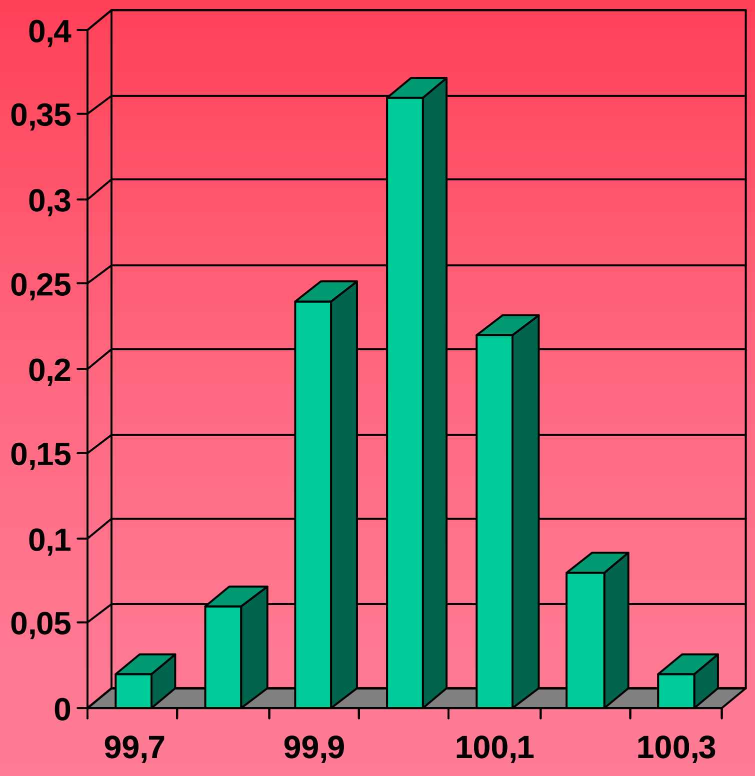
- Primeiro, calcula-se a média aritmética
- Depois, subtrai-se do valor de cada leitura a média aritmética delas
- eleva-se os resultados ao quadrado
- soma-se os resultados
- divide-se o resultado da soma anterior pelo número de leituras menos 1. Utilizamos *n-1* pois a diferença entre os valores costuma ser pequena. Se a diferença fosse grande poderia-se empregar apena *n*.

Medida da dispersão para o valor central (cont.)

O Desvio padrão (s): é a raíz quadrada positiva da variância .

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

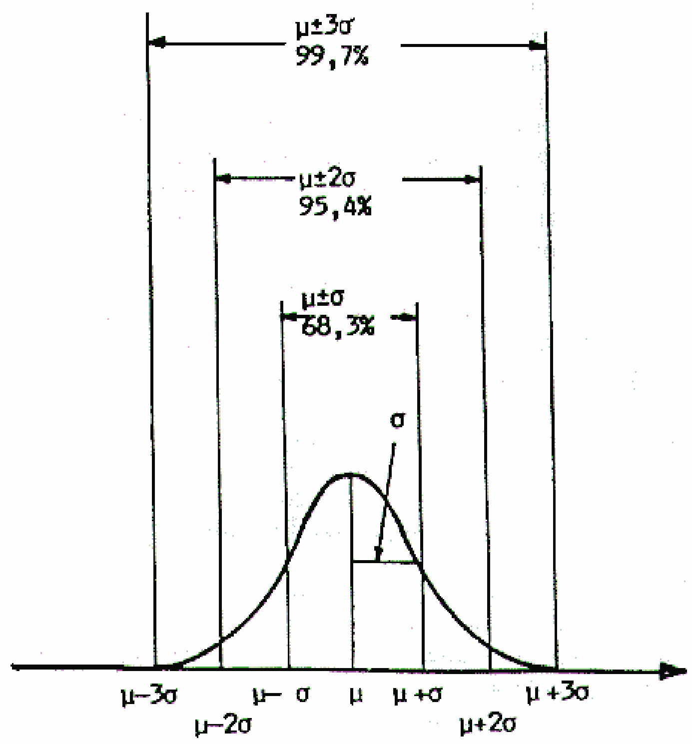
A lei normal dos erros



A lei normal, de Gauss ou Gaussiana, constitui a base para a maior parte dos estudos dos efeitos aleatórios.

Distribuição dos erros aleatórios

Curva de distribuição de erros aleatórios, assim como os respectivos percentuais correspondentes à área.



Área subentendida sob a curva normal

Distribuição dos erros aleatórios

- A área total sob a curva gaussiana é igual a 1 (ou 100%)
- A área entre -s e +s (ou $-\sigma$ e $+\sigma$) define o número relativo de casos que diferem da média não mais que 1 desvio padrão
- O valor pode ser encontrado em tabelas ou calculado (no caso, 0,68 ou 68% dos casos se situam entre os limites *s* (ou $-\sigma$ e $+\sigma$)

Distribuição dos erros aleatórios

Desvio (±)	Fração da área inclusa
0,6745 σ	0,5000
1 σ	0,6828
2 σ	0,9546
3 σ	0,9972
1,96 σ	0,9500

Distribuição dos erros aleatórios

- Na prática, o número de medições é pequeno (custo), e *s* (desvio padrão) é calculado sobre este número reduzido de medidas.
- Para determinar a *confiança* de um número limitado de medidas, utiliza-se a tabela de distribuição *t* de student

Tabela de Student (para curvas simétricas)

Graus de liberdade $v = n - 1$	t90% $\alpha/2 = 0,05$	t95% $\alpha/2 = 0,025$	t99% $\alpha/2 = 0,01$
1	6,314	12,706	63,657
2	2,920	4,303	9,925
3	2,353	3,128	5,841
4	2,132	2,770	4,604
5	2,015	2,571	4,032
6	1,943	2,447	3,707
7	1,895	2,365	3,499
8	1,860	2,306	3,355
9	1,833	2,262	3,250
10	1,812	2,228	3,169
11	1,796	2,201	3,106
12	1,782	2,179	3,005
13	1,771	2,160	3,012
14	1,761	2,145	2,977
15	1,753	2,131	2,947
16	1,746	2,120	2,921
17	1,740	2,110	2,898
18	1,734	2,101	2,878
19	1,729	2,093	2,861
20	1,725	2,086	2,845
21	1,721	2,080	2,831
22	1,717	2,074	2,819
23	1,714	2,069	2,807
24	1,711	2,064	2,797
25	1,708	2,060	2,787
30	1,697	2,042	2,750
40	1,684	2,021	2,704
60	1,671	2,000	2,660
120	1,658	1,980	2,617
∞	1,645	1,960	2,576

Distribuição dos erros aleatórios

- A área , na tabela de student é definida em função de α (probabilidade de erro) e g.l. (grau de liberdade ou n-1)
- Considerando uma distribuição normal, α é a fração de área não inclusa (ou seja , a área que sobra nos extremos do intervalo de confiança)
- logo teremos $\alpha/2$ em cada extremo da curva

Distribuição dos erros aleatórios

Em aplicações metrológicas, em laboratórios secundários ou terciários, utiliza-se $\alpha = 5\%$.

Isto representa a probabilidade de que uma nova série de medidas resulte numa média que caia fora do limite estabelecido (no caso, $\pm 1{,}96\ \sigma$)

Ou seja , a confiabilidade dos resultados é de 95%

Teorema do limite central

O teorema do limite central trata com a probabilidade de que a média x de uma amostra aleatória será provavelmente próxima da média da população μ dado que a população tem uma distribuição normal. Por conseguinte, o desvio padrão s pode ser usado via teorema do limite central para indicar que a média amostral é aproximadamente igual à média da população μ

Teorema do limite central

A fórmula usada para isto é

$$S_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Incerteza da medição

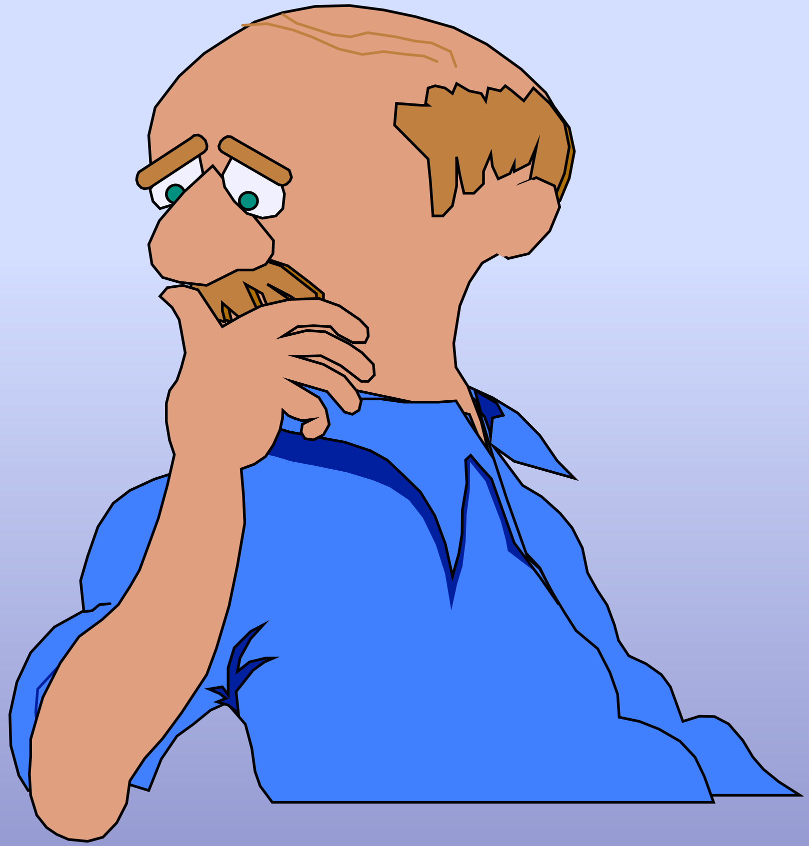
Podemos então determinar a incerteza (ou intervalo de confiança) empregando a fórmula

$$IM = t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Exercício prático

Calcular a incerteza na calibração de um gerador de nível para um intervalo de confiança de 95%. Os resultados encontrados na calibração usando um power meter com resolução de 0,01 dB foram:

0,21 , -0,30 , 0,20 , -0,12 , 0,00 e -0,12 dBm /75Ω



Solução:

- Inicialmente, devemos calcular a média das medidas. Para tanto, devemos converter os valores em dBm para potência (mW).

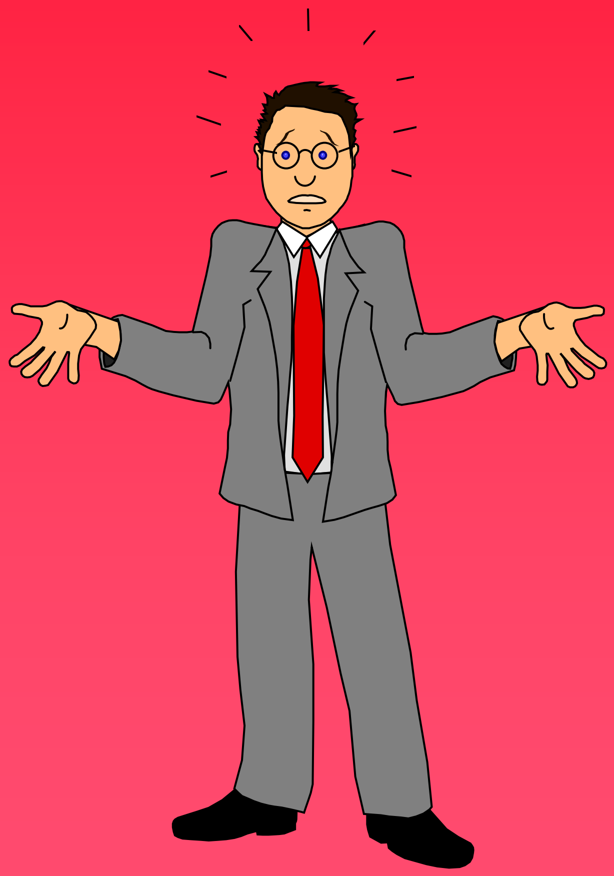
A fórmula para a conversão é:

$$P_{(mW)} = 10^{\left(\frac{dBm}{10}\right)}$$

Solução(cont.):

Mas e agora?

Quantas casa decimais
eu uso na conversão
de dBm para mW???



Solução(cont.):

Estabelecemos o número de casas com base na resolução do power meter. O número de casas eleito deve possibilitar a visualização da mudança do resultado em mW quando houver mudança de um passo na resolução. No nosso exemplo, 0,01 dB equivale a 1,002 mW, e 0,02 dB correspondem a 1,004 mW ou seja , são necessárias 4 casas decimais!

Solução(cont.):

0,21 = 1,050 mW

-0,30 = 0,933 mW

0,20 = 1,047 mW

-0,12 = 0,973 mW

0,00 = 1,000 mW

-0,12 = 0,973 mW

Solução(cont.):

Calculamos então a média x :

1,050 + 0,933 +1,047+0,973 + 1,000 + 0,973 =5,975

5,975 / 6 = 0,996

x = 0,996 mW

(-0,017 dBm)

Solução(cont.):

Calcula-se o desvio padrão:

$$s = \sqrt{\frac{(1{,}050-0{,}996)^2+(0{,}933-0{,}996)^2+(1{,}047-0{,}996)^2+(0{,}973-0{,}996)^2+(1{,}000-0{,}996)^2+(0{,}973-0{,}996)^2}{5}}$$

$$s = 0{,}046$$

Solução(cont.):

O intervalo de confiança será, então,

$$0{,}996 - 2{,}571.\frac{0{,}046}{\sqrt{6}} \leq x \leq 0{,}996 + 2{,}571.\frac{0{,}046}{\sqrt{6}}$$

ou

$0{,}948 \text{ mW} \leq x \leq 1{,}044 \text{ mW}$

ou, em dBm,

$-0{,}23 \text{ dBm} \leq x \leq +0{,}18 \text{ dBm}$

Solução(cont.):

O resultado poderá então ser expresso das seguintes formas:

incerteza: RM= -0,017 dBm ± 0,20 dB

ou

intervalo de confiança = -0,23 dBm $\leq x \leq$ +0,18 dBm


Obrigado por sua atenção!